ΘΕΜΑ Α

Επιμέλεια: Γκαμπέτα Γ.

Α1 Σελ. 111

Α2 Σελ. 73

Α3 Σελ. 128

Α4 α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

άβαξ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Β

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$

$h:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ h(x)=\ln x$

Β1 $f = g\circ h$

Πεδίο ορισμού της f: $D_f=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_g\}=\mathbb{R}^+$

αφού · $x\in(0,+\infty)$

· $h(x)\in\mathbb{R}$

Τύπος της f: $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}$

$=\dfrac{4-(e^{\ln x})^2}{x}=\dfrac{4-x^2}{x}$

Άρα, $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x},\ x>0$

B2) i) Για κάθε $x>0$,

$$f'(x)=\left(\frac{4-x^2}{x}\right)'=\frac{-2x^2-(4-x^2)}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}$$

$$=-\frac{x^2+4}{x^2}<0.$$ Άρα, η f γν. φθίνουσα

ii) $$\pi>e \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(\pi)<f(e)\Rightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}$$

$$\overset{4-e^2<0}{\Longrightarrow} \frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$$

B3) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[(4-x^2)\cdot\frac{1}{x}\right]\overset{4\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{x}=0$$

Άρα, η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ (δηλ. τον άξονα $y'y$) και στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=-x$.

B4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\cdot\frac{1}{f(x)}\right]=\ell$$

Έχω, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$, αφού $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=-\infty$

Για $x>2$,

$$\left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\cdot\frac{1}{f(x)}\right| = |\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|\cdot\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\Rightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \sigma\upsilon\nu(1+x^2)\cdot\frac{1}{f(x)} \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0$$

Άρα, από κριτήριο παρεμβολής, $\ell = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1 \end{cases}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\int_2^3 x f(x)\,dx = 1$$

Γ1) Έχω, $\int_2^3 x f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 \left(x\cdot\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\right)dx = 1$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_1^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{3}+\frac{9\alpha}{2}-\cancel{2}-2\alpha = \cancel{1} \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2) i) • $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} =$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = 1-2 = -1.$$

• $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1$

Άρα, η f παράγ/μη στο 1, οπότε ορίζεται εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 = 1$.

ii) $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = -1(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y = -x + 2$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $f'(1) = -1$

Αν ω η ζητούμενη γωνία, έχω

$$\varepsilon\varphi\omega = -1, \quad 0 \leq \omega < \pi$$

άρα, $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$ rad.

Γ3 $$f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Ισχύει, $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \downarrow \mathbb{R}$

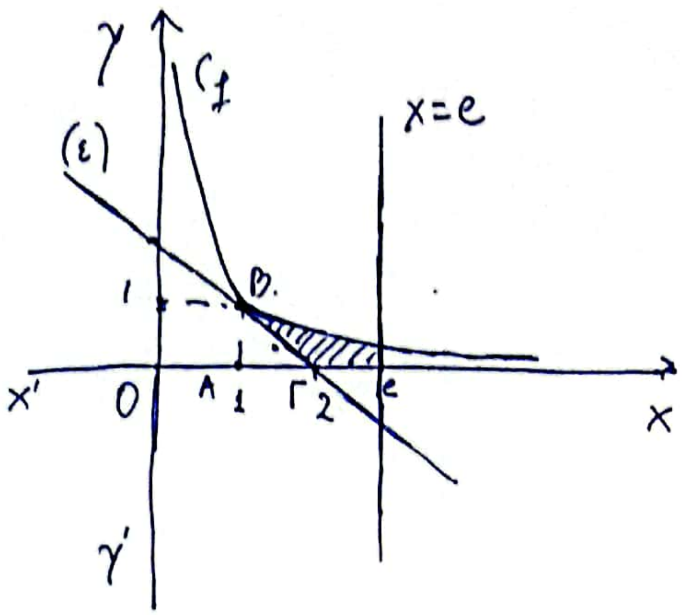
άρα και "1-1".

$$f(\mathbb{R}) \underset{f: \text{συνεχής}}{\overset{f:\downarrow}{=\!=}} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty), \text{ διότι}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3) = -\infty$

Γ4] Για $x>1$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$
f συνεχής στο $[1,+\infty)$ $\Rightarrow$ f κυρτή στο $[1,+\infty)$

Άρα, η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σ. επαφής. Άρα $f(x)\geq -x+2$, για κάθε $x\geq 1$



$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)\,dx-(AB\Gamma)$$
$$=\int_1^e \frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=\left[\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}$$
$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ τ.μον.}$$

ΘΕΜΑ Δ $f:(0,2)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k$, $k\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$$

Δ1] Θεωρώ $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$, $x\in(0,1)\cup(1,2)$

- $\lim_{x\to 1} g(x)=\ell$
- $f(x)=(x-1)g(x)+2x$, $x\in(0,1)\cup(1,2)$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+2x\right]$

$\overset{f:\text{συν}}{\iff} f(1) = 0\cdot \ell + 2$

$\iff -1+k = 2 \iff k=3$

Δ2)

Για κάθε $x \in (0,2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{(x-2)x^2}$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	//		$+$	0	$-$		//
$f(x)$	//		$\nearrow$		$\searrow$		//

• $\Delta_1 = (0,1]$, $f \nearrow \Delta_1$, $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

$0 \in f(\Delta_1)$ κ' αφού $f \nearrow \Delta_1$, υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in \Delta_1$ τ.ω. $f(x_1)=0$. προφανώς $x_1 \neq 1$,

άρα $x_1 < 1$

• $\Delta_2 = (1,2)$, $f \searrow \Delta_2$, $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) = (-\infty, 2)$

$0 \in f(\Delta_2)$ κ' αφού $f \searrow \Delta_2$, υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in \Delta_2$ τ.ω. $f(x_2)=0$. προφανώς $x_2 > 1$

Τελικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1<1<x_2$.

Ακόμη, $x_1 < \frac{1}{3} \overset{f \uparrow (0,1)}{\iff} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \iff 0 < \ln\frac{5}{3}$, ισχύει

Δ3) • Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

• Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής

$\exists\, \xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επιπλέον, $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$

Άρα, η f' γν. φθίνουσα, οπότε το ξ μοναδικό.

Τελικά, υπάρχει μοναδικό $M(\xi, f(\xi))$, $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η κλίση της C_f να είναι $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4) i) $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$, $x \in (0,2)$

υπάρχει $c \in \mathbb{R}$: $F(x) = G(x) + c$, $x \in (0,2)$

για $x = x_1$: $\cancel{F(x_1)}^{0} = G(x_1) + c \Rightarrow c = -G(x_1)$

για $x = x_2$: $F(x_2) = \cancel{G(x_2)}^{0} + c \Rightarrow c = F(x_2)$

Άρα, $F(x_2) = -G(x_1) \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii) $x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x \Leftrightarrow$

$x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0$

Θεωρώ $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2$, $x \in (0,2)$

• $h(x_1) = x_1 \cancel{F(x_1)}^{0} + x_2 G(x_1) + 2x_1 - x_1 - x_2$

$= x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$

Έχω:

$f([x_1,1]) = [0,2]$

$f([x_2,1]) = [0,2]$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$ (1)

• $G'(x) = f(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2)$

άρα $G \uparrow [x_1, x_2] \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2)$

$\Rightarrow G(x_1) < 0$

άρα $x_2 G(x_1) < 0$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow h(x_1) < 0$

• $h(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) + 2x_2 - x_1 - x_2$

$= -x_1 G(x_1) - x_1 + x_2 = -[x_1 \cdot G(x_1) + x_1 - x_2] > 0$

Η h συνεχής στο $[x_1, x_2]$
$h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$
$\xRightarrow{\text{Θ.Bolzano}}$ Η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2).

Ακόμη, $h'(x) = x_1 \cdot f(x) + x_2 f(x) + 2$

$= (x_1 + x_2) \cdot f(x) + 2 > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

άρα, η h γν. αύξουσα στο (x_1, x_2).

Τελικά, η εξίσωση $h(x) = 0 \iff$

$$x_1 F(x) + x_2 \cdot G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο (x_1, x_2)